Approximation

I Fonctions en escalier

On note $\mathcal{E}([a,b],E)$ l'ev de fonctions en escalier $[a,b]\to E$

Prop: Soit $f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],E)$, il existe alors $g\in\mathcal{C}([a,b],E)$ et $\varphi\in\mathcal{E}([a,b],E)$ tq $f=g+\varphi$

D/ Par récurrence sur le nombre p de discontinuité de f:
$p=0$ OK, $p=1$ supposons f discontinue en x_1 : $c<x_1<b$
$\varphi_0(x)=0$ si $x<x_1$, $\varphi_0(x_1)=0$, $\varphi_0(x)=f(x_1^-)-f(x_1^+)$ si $x>x_1$

$f-\varphi_0$ a pour limite à gauche et à droite $f(x^-)$ | $\lambda=f(x)-~~f(x)~~-f(x^-)$

Alors $\underbrace{f-(\varphi_0+\chi_{\{x\}}\times\lambda)}_{g\in\mathcal{C}^0}$ | a pour limite à droite et à gauche $f(x_1^-)$ en x_1, vaut $f(x_1)$ en x_1

$p\to p+1$ On remplace f par $f-(\varphi_{p+1}+\chi_{\{x_{p+1}\}}\lambda_{p+1})$ pour faire disparaître la discont de f en x_{p+1} ETC

Th: Soit $f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],E)$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\varphi\in\mathcal{E}([a,b],E)$

tq ~~$[a,b],E$~~ $\forall x\in[a,b]$ $\|f(x)-\varphi(x)\|\leq\varepsilon$ $[\|f-\varphi\|_\infty\leq\varepsilon]$

D/ Clé = unif $\mathcal{C}^0$. 1er cas: $f\in\mathcal{C}^0$ donc UC sur $[a,b]$

Soit $\eta>0$ tq $\forall(s,t)\in[a,b]^2$, $|s-t|<\eta\Rightarrow\|f(s)-f(t)\|\leq\varepsilon$
Soit $(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $<\eta$

[0,1]

Posons: $\begin{cases} \varphi(x) = f(x_k) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[,\ k=0,\dots,n-1 \\ \varphi(x) = f(x_n) \end{cases}$

Soit $x \in [a,b]$. Il existe $k \begin{cases} x = b = x_k \\ \text{ou} \\ x \in [x_k, x_{k+1}[\end{cases}$

$$\|f(x) - \varphi(x)\| \leq \|f(x) - f(x_k)\| + \cancel{\|f(x_k) - \varphi(x_k)\|}$$
$$\leq \varepsilon.$$

2e cas: Cas général

avec le 1er cas on trouve $\varphi \in \mathcal{E}$ tq $\|g - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$

il vient $\|f - (\varphi + \psi)\|_\infty \leq \varepsilon$

Conséquence il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{E}([a,b], E)$ tq $\|f - \varphi_n\|_\infty \to 0$

D/ $\varepsilon = \frac{1}{n}$

E evn Df

fct bornées

Appl: Soit R l'adhérence de $\mathcal{E}([a,b], E)$ dans $\mathcal{B}([a,b], E)$ pour $\| \ \|_\infty$ (R est, en fait, l'ev des fcts réglées)

$R \supset \mathcal{C}_{pm}([a,b], E)$ avec ce qui précède

(1) Soit φ en escaliers, $(x_0, \dots, x_n) = \sigma$ une subdivision attachée à φ, $\varphi(]x_k, x_{k+1}[) = \{\lambda_k\}$, on pose $I_\sigma(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\lambda_k$

Si σ' est attaché à φ, $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine et par regroupement que σ et σ'

$I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma \cup \sigma'}(\varphi) = I_{\sigma'}(\varphi)$

Not: $I(\varphi)$ est la valeur commune de $I_\sigma(\varphi)$

② $I(\varphi+\psi)=I(\varphi)+I(\psi)$

si σ est attachée à φ, σ' ——— ψ, $\sigma''=\sigma\cup\sigma'$

$$I(\varphi+\psi)=I_{\sigma''}(\varphi+\psi)=I_{\sigma''}(\varphi)+I_{\sigma''}(\psi)$$
$$=I(\varphi)+I(\psi)$$

③ $\|I(\varphi)\|\leq(b-a)\|\varphi\|_\infty$ et, si $E=\mathbb{R}$, $\varphi\geq 0\Rightarrow I(\varphi)\geq 0$

Extension : Soit $f\in R$, Soit $(\varphi_n)\in\mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ tq $\varphi_n\xrightarrow{\|\|_\infty} f$

$$\|I(\varphi_n)-I(\varphi_m)\|=\|I(\varphi_n-\varphi_m)\|\leq(b-a)\|\varphi_n-\varphi_m\|_\infty$$

Or φ_n est unif $\mathcal{C}^0$ de Cauchy donc $I(\varphi_n)$ aussi

E étant de dim finie, est complet, donc $I(\varphi)$ CV

$$\exists \lim_{\substack{\varphi\to f\\ \varphi\in\mathcal{E}}} I(\varphi)=\int_a^b f$$

⑤ Par passage à la limite $\int_a^b$ est linéaire

$$\left\|\int_a^b\right\|\leq\int_a^b\|\,\|\quad\begin{cases}\varphi_n\xrightarrow{CVU} f\\ \Rightarrow\|\varphi_n(x)\|\xrightarrow{CVU}\|f(x)\|\end{cases}$$

$E=\mathbb{R}$ $f\geq 0\Rightarrow\int_a^b f\geq 0$ $\|\int$ est $\nearrow$

⑥ Chasles Idem

⑦ (Leibniz)

Th (Leibniz) Soit $f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],E)$

① $F: x\longmapsto\int_a^x f$ est lip sur $[a,b]$

$$\|F(x)-F(x')\|=\left\|\int_x^{x'}f\right\|\leq\left|\int_x^{x'}\|f\|\right|\leq\|f\|_\infty|x-x'|$$

b) F possède en x une dérivée à droite et à gauche $\left| \begin{array}{l} F'_d(x) = f(x^+) \\ F'_g(x) = f(x^-) \end{array} \right.$

$\underline{x<b}$ $\|F(x+h) - F(x) - h f(x^+)\| = \left\|\int_x^{x+h} f(t) - f(x^+) dt\right\|$

$\underline{h>0}$ Soit $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ $\left| \leq \int_x^{x+h} \|f(t) - f(x^+)\| dt \right.$

tq $\forall t \in]x, x+\delta[$, $\|f(t) - f(x^+)\| \leq \varepsilon$

d'où $\int_x^{x+h} \|f(t) - f(x^+)\| dt \leq \varepsilon h$ ($t = x \longrightarrow$ SI)

|| F est $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux

|| Si f est $\mathcal{C}^0$, F est C^1 et $F' = f$

$\underline{\text{Ex.}}$ (Riemann Lebesgue)
Soit $f \in \mathcal{C}_{\underline{pm}}([a,b], \mathbb{C})$ Mq $\exists \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$

S/ $\underline{\text{Idée}}$: remplacer f par une fonction simple

$\underline{1^{er} \text{cas}}$: $f = \chi_{[c,d]}$: $\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \dfrac{e^{i\lambda d} - e^{i\lambda c}}{i\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$

$\underline{2^e \text{cas}}$ $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ Combinaison linéaire

$\underline{3^e \text{cas}}$: Soit $\varepsilon>0$ $\exists \varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ tq : $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$

de la différence entre les deux intég

$\boxed{\text{Majoration du } \Delta}$: $\left|\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt - \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t}\right| \leq \int_a^b |f - \varphi| \leq \varepsilon |b-a|$

$\boxed{\lambda \to +\infty}$: $\exists A_\varepsilon : \forall \lambda \geq A_\varepsilon$ $\left|\int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt\right| \leq \varepsilon$ (1^{er} cas)

$\boxed{\text{Fin}}$ Soit $\lambda \geq A_\varepsilon$

$\left|\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt\right| = \left|\int_a^b (f - \varphi) e^{i\lambda t} dt + \int_a^b \varphi e^{i\lambda t}\right| \leq |\,''\,| + |\,'''\,| \leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon$

LS

→ SOMMES de RIEMANN

Th: Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$. Soit $\sigma_p = (x_{0,p}, \dots, x_{m_p,p})$ une suite de subdivisions dont les pas $|\sigma_p| = \max |x_{k+1,p} - x_{k,p}|$ tend vers 0

$c_{k,p} \in [x_{k,p}, x_{k+1,p}]$, $k = 0 \dots m_p - 1$

approche par une fct en escalier ⇔ f unif $\mathcal{C}^0$.

Si $S_p(f) = \sum_{k=0}^{m_p-1} (x_{k+1,p} - x_{k,p}) f(c_{k,p})$, on a $\exists \lim_{p\to\infty} S_p(f) = \int_a^b f$

D/ Soit $\varepsilon > 0$. D'après Heine sur $[a,b]$ il existe $\eta > 0$ tq :

$\forall s,t \in [a,b]^2$, $|s-t| \leq \eta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$

Soit p $|\sigma_p| < \eta$, on écrit

$$\left|S_p(f) - \int_a^b f\right| = \left|\sum_{k=0}^{m_p-1} (x_{k+1,p} - x_{k,p}) f(c_{k,p}) - \int_{x_{k,p}}^{x_{k+1,p}} f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m_p-1} \left|\int_{x_{k,p}}^{x_{k+1,p}} f(c_{k,p}) - f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m_p-1} \varepsilon (x_{k+1,p} - x_{k,p}) \quad (\text{car } |\sigma_p| < \eta \text{ + unif } \mathcal{C}^0)$$

$$= (b-a)\varepsilon \quad ✓$$

Ex: (Mines) Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, étudier la suite $u_m = m\left(\int_0^1 f - \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k}{m}\right)\right)$

S/ étudions $\int_0^1 f - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k}{m}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right)$

$t \in \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]$: $f(t) = f\left(\frac{k}{m}\right) + \left(t - \frac{k}{m}\right) f'\left(\frac{k}{m}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{m}\right)^2 f''(c_{t,k})}_{\mathcal{C}^0 \text{ de } t \text{ par diff.}}$

il vient $\int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right) dt = \underbrace{\int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \left(t - \frac{k}{m}\right) f'\left(\frac{k}{m}\right)}_{I_k}$

$+ \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} R_k(t)\,dt$

$$I_k = \left[-f'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 \right]_{k/n}^{k+1/n} = \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\left|\int_{k/n}^{k+1/n} R_k\right| \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{6} \frac{1}{n^3}$$

Reste : $u_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\left(f(1) - f(0)\right)$$

Ex : Calculer, pour $r \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ $\int_0^{2\pi} \ln|1-2r\cos t + r^2| \, dt$ $(= I(r))$

S/ RM : $1-2r\cos t + r^2 = (r-e^{it})(r-e^{-it}) = |r-e^{-it}|^2$

On etudie $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln|1-2r\cos\frac{2k\pi}{n} + r^2| = 2\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} |r - e^{\frac{2ik\pi}{n}}|\right)$

Or $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{i2k\pi}{n}})$ donc $S_n = 2\ln|r^n - 1|$

comme $\frac{1}{n} S_n \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1-2r\cos t + r^2)\, dt$

pour $r > 1$: $\frac{1}{n} S_n = 2\ln|r| + \frac{2}{n} \ln\left|1 - \frac{1}{r^n}\right| \longrightarrow 2\ln(r)$

donc $\int_0^{2\pi} \ln(|1-2r\cos t + r^2|)\, dt = 4\pi \ln r$

si $r < 1$: $I(r) = 0$

II Approximation par des fonctions régulières

A) Fonctions affines par morceaux

Th : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], E)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ APM $[a,b] \to$ affine

tq $\sup_{t \in [a,b]} \|f(t) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon$

D/ Soit $\varepsilon>0$, le th de Heine s'applique sur $[a,b]$ et donc
$\exists \eta>0\ \forall (s,t)\in[a,b]^2,\ |s-t|<\eta \Rightarrow \|f(s)-f(t)\| \leq \varepsilon$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tq $\frac{b-a}{n} \leq \eta$ et $x_k = a+\frac{k(b-a)}{n}$, $k=0 \ldots n$

Notons φ la fct affine par morceaux tq $\varphi(x_k) = f(x_k)$, $k=0 \ldots n$
$t\in[0,1]$: $\varphi(t x_k + (1-t)x_{k+1}) = t\varphi(x_k) + (1-t)\varphi(x_{k+1}) = t f(x_k) + (1-t) f(x_{k+1})$

Soit $x\in[a,b]$, il existe $k\in[\![0,n-1]\!]$ tq $x\in[x_k, x_{k+1}]$

$x = t x_k + (1-t) x_k$

$\|f(x)-\varphi(x)\| = \|t(f(x)-f(x_k)) + (1-t)(f(x)-f(x_{k+1}))\|$

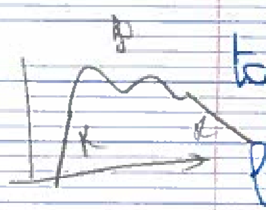
$\leq t\|\ \ \| + (1-t)\|\ \ \| \leq \varepsilon$

Conséquence : Il existe une suite (φ_n) de fonction APM $[a,b]\to E$ qui CVU vers f

RM : Chaque φ_n est lip de Cst K_n (en gal $K_n \to +\infty$)
général

B) Fonctions $\mathcal{C}^1$

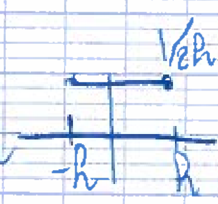
(HP) Th : Soit $f\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, il existe une suite $\varphi_n\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$



tq $\varphi_n \xrightarrow{CVU} f$ et tq de plus si f est K-lip, chaque φ_n a sa dérivée bornée par K.

D/ f K-lipsch On prolonge f en fonction K-lipsch hors de $[a,b]$ à support compact $[c,d]$

Convolution : pour $h>0$, on note χ_h



$$\varphi_h(x) = f * \chi_h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\chi_h(x-t)\,dt = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$$

On regarde $|\varphi_h(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(f(t)-f(x))\right| \leq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt$

$$\leq \frac{K}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|t-x|\,dt$$

$$= \frac{K}{h}\int_0^h u\,du = \frac{Kh}{2}$$

$h = \frac{1}{n}$ $\quad \|f - \varphi_{1/n}\|_\infty \leq \frac{K}{2n} \longrightarrow 0$

Enfin $|\varphi_h'(x)| = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \leq \frac{K\,2h}{2h} = K$

RM. $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$ (produit usuel) $\quad$ ^: transformée de Fourier de u.

C) Approximation par des polynômes

démo plus tard

Th (Weierstrass) Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$

a) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tq $\forall x \in [a,b]$ $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$

b) $\left(\varepsilon = \frac{1}{n}\right)$ il existe une suite $P_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $P_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f$ sur $[a,b]$

⚠ limites du théorème :

① Le th est valable sur un segment : si f est lim unif de Pôl alors f est un Pôl ~~(sur R)~~ (sur R)

S/ Si $\underbrace{P_n}_{\in\mathbb{R}_n[X]} \xrightarrow{CVU} f$, $P_{n+1} - P_n = P_{n+1} - f + f - P_n \longrightarrow 0$

donc $P_{n+1} - P_n$ est bornée apcr, mettons pour $n \geq N$

donc apcr $P_{n+1} - P_n = \text{cste}$, $P_n = P_N + C_n$ CVU vers f

C_n CVU vers $f - P_N = \text{cste}$

donc $f = P_N + C$.

② Faux sur $\mathbb{C}$

On part de S^1, $\mathbb{C}[X]$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$ $(\bar{z}?)$

Soit $f : z \mapsto \bar{z}$: si f est limite uniforme de $P_n \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ pour $\| \ \|_\infty$ sur S^1

On regarde $z f(z) = g(z)$. g est lim uniforme sur S^1 de polynômes $z P_n(z)$.

i) $\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$

ii) $\int_0^{2\pi} e^{i\theta} P_n(e^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \sum_{k=0} a_k e^{ik\theta} d\theta = 0$

On par CVU $[0, 2\pi]$ $\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) d\theta = \lim_{n \to +\infty} \int e^{i\theta} P_n(e^{i\theta}) d\theta$

donc $2\pi = 0$ Absurde

Valable pour $\| \ \|_1$ car $\| \ \|_1$ plus fine que $\| \ \|_\infty$

a servi à l'oral quelqu'un de l'X

Exos ① Soit U un ouvert de $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$, si $U \neq \emptyset$ U contient une fonction $\mathcal{C}^\infty$

S/ densité de $\mathbb{R}[X]$: soit $f \in U$, U étant ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ $B_{\| \|_\infty}(f, \varepsilon) \subset U$ W : $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ $\|f - P\|_\infty < \varepsilon/2$ AQT

Les inégo s'intègrent mais ne se dérivent pas

② Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ Mq $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ | $P_n \xrightarrow{CVU} f$, $P_n' \xrightarrow{CVU} f'$

S/ On commence par f' : Soit $\varepsilon > 0$: Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$:

$\|f' - Q\|_\infty < \varepsilon$, il vient $\forall x \in [0,1]$ $\left| \int_0^x f' - \int_0^x Q \right| \leq \int_0^1 |f' - Q|$

donc $P : x \mapsto f(0) + \int_0^x Q$ convient

③ Th des moments Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t) t^n = 0$
Mq $f \equiv 0$

50

S/ Par linéarité, $\forall P \in \mathbb{C}[X]$ $\int_a^b f(t)P(t)\,dt = 0$

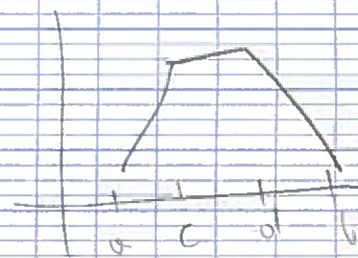
S1 Soit moyennant Weierstrass P_n une suite de $\mathbb{C}[X]$ qui converge unif vers $\bar{f}$ sur le segment $[a,b]$, comme f est borné $fP_n \xrightarrow{CVU} f\bar{f} = |f|^2$ sur $[a,b]$

Par CVU sur le segment $0 = \int_a^b |f|^2$ donc $f = 0$

IV Approximation intégrale:

Ex: L'algèbre des fct polynômes sur $[a,b]$ est dense dans $C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ pour $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$

S/ Fonctions élémentaires : $f = \chi_{[c,d]}$



On approche f par g continue (APM)

Selon Weierstrass il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\|g-P\|_\infty \leq \varepsilon$

d'où $\int_a^b |g-P| \leq \varepsilon(b-a)$, $\int_a^b |f-P| \leq \varepsilon + \varepsilon(b-a)$

Combi linéaires : $\mathbb{R}[X]$ dense dans $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$

CC : $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est dense dans $C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ pour $\| \ \|_1$
par transitivité $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ pour $\| \ \|_1$
(Si $A \subset \bar{B}$, $\bar{A} = E \Rightarrow \bar{B} = E$)

Ex : $\mathrm{Vect}(e^{ikx})$ est dense dans $\mathcal{C}_{pm,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour $\| \ \|_2$